ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №3
ПО КУРСУ "ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА"
Модуль 3 — Алгебраические системы
Для специальностей ИУ5, 2 курс, 4 семестр
2015 г.

Задача 1

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с одной бинарной операцией полугруппой? моноидом? группой? Символом $\mathbb{O}$ в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 1. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1\}$, с операциями сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в аддитивной группе $\mathbf{Z}_2^{\oplus}$ вычетов по модулю 2.

Вариант 2. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1\}$, с операцией умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) \odot (c,\ d) = (a \cdot c,\ b \cdot d).$$

Операция умножения элементов упорядоченных пар выполняется в мультипликативном моноиде $\mathbf{Z}_2$ вычетов по модулю 2.

Вариант 3. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$, с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в аддитивной группе $\mathbf{Z}_3^{\oplus}$ вычетов по модулю 3.

Вариант 4. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1\}}$, с операцией сложения матриц. Операции сложения элементов матриц выполняются в моноиде $\left(2^{\{0,1\}},\ \cup\right)$.

Вариант 5. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1, 2\}$, с операцией сложения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a \oplus c,\ b \oplus d).$$

Операция сложения элементов упорядоченных пар выполняется в аддитивной группе $\mathbf{Z}_3^{\oplus}$ вычетов по модулю 3.

Вариант 6. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операцией сложения матриц. Операции сложения элементов матриц выполняются в группе $\left(2^{\{0,1\}},\ \triangle\right)$.

Вариант 7. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1\}$, с операцией сложения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a + c,\ b + d).$$

Операции сложения элементов упорядоченных пар выполняется в моноиде $(\{0, 1\},\ \vee)$.

Вариант 8. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in 2^{\{0,1\}}$, с операцией умножения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a,\ b) \odot (c,\ d) = (a \cdot c,\ b \cdot d).$$

Операция умножения элементов упорядоченных пар выполняется в моноиде $\left(2^{\{0,1\}},\ \cap\right)$.

Задача 1

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с одной бинарной операцией полугруппой? Моноидом? Группой? Символом $\mathbb{O}$ в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 9. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операций сложения матриц. Операции сложения элементов матриц выполняются в моноиде $\left(2^{\{0,1\}},\ \cup\right)$.

Вариант 10. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in 2^M$ (M — некоторое множество), с операцией сложения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a + c,\ b + d).$$

Операция сложения элементов упорядоченных пар выполняется в группе $\left(2^M,\ \triangle\right)$.

Вариант 11. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \{0, 1\}$, с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в моноиде $(\{0, 1\},\ \vee)$.

Вариант 12. Множество чисел вида $x + \sqrt{2}y$, где x и y — рациональные числа, с операцией сложения чисел, определенной по следующему правилу

$$(x_1 + \sqrt{2}y_1) + (x_2 + \sqrt{2}y_2) = (x_1 + x_2) + \sqrt{2}(y_1 + y_2).$$

Операции сложения выполняются в аддитивной группе рациональных чисел.

Вариант 13. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ \mathbb{O} & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \{0, 1\}$ с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в моноиде $(\{0, 1\},\ \min)$.

Вариант 14. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ b & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1\}}$, с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в моноиде $\left(2^{\{0,1\}},\ \cap\right)$.

Вариант 15. Множество чисел вида $x + \sqrt{3}y$, где x и y — рациональные числа, с операцией сложения чисел, определенной по следующему правилу

$$(x_1 + \sqrt{3}y_1) + (x_2 + \sqrt{3}y_2) = (x_1 + x_2) + \sqrt{3}(y_1 + y_2).$$

Операция сложения выполняется в аддитивной группе рациональных чисел.

Вариант 16. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1\}$, с операцией сложения, определенной по следующим правилам:

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a + c,\ b + d).$$

Операция сложения элементов упорядоченных пар выполняется в моноиде $(\{0, 1\},\ \max)$.

Задача 1

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с одной бинарной операцией полугруппой? Моноидом? Группой? Символом $\mathbb{O}$ в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 17. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$, с операцией умножения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a,\ b) \odot (c,\ d) = (a \cdot c,\ b \cdot d).$$

Операция умножения элементов упорядоченных пар выполняется в мультипликативном моноиде $\mathbf{Z}_4$ вычетов по модулю 4.

Вариант 18. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3\}$, с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в аддитивной группе кольца $\mathbf{Z}_4$ вычетов по модулю 4.

Вариант 19. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1, 2\}$, с операцией сложения, определенной по следующим правилам:

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a + c,\ b + d).$$

Операции сложения элементов упорядоченных пар выполняются в аддитивном моноиде $(\{0, 1, 2\},\ \max)$.

Вариант 20. Множество многочленов степени не выше n, коэффициенты которых — действительные числа, с операцией сложения многочленов, определенной по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \oplus \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i.$$

Операция сложения действительных чисел выполняется в аддитивной группе действительных чисел.

Вариант 21. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1,2,3\}}$, с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в моноиде $\left(2^{\{0,1,2,3\}},\ \cup\right)$.

Вариант 22. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, с операцией умножения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a,\ b) \cdot (c,\ d) = (a \odot c,\ b \odot d).$$

Операция умножения элементов упорядоченных пар выполняется в мультипликативном моноиде $\mathbf{Z}_5$ вычетов по модулю 5.

Вариант 23. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1,2\}}$, с операцией сложения матриц. Операция сложения элементов выполняется в группе $\left(2^{\{0,1,2\}},\ \triangle\right)$.

Вариант 24. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \{0, 1\}$, с операцией сложения матриц. Операции сложения элементов матриц выполняется в моноиде $(\{0, 1\},\ \min)$.

Задача 1

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с одной бинарной операцией полугруппой? Моноидом? Группой? Символом $\mathbb{O}$ в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 25. Множество чисел вида $x+\sqrt{5}y$, где x и y — рациональные числа, с операцией сложения чисел, определенной по следующему правилу

$$(x_1+\sqrt{5}y_1)+(x_2+\sqrt{5}y_2)=(x_1+x_2)+\sqrt{5}(y_1+y_2).$$

Операция сложения выполняется в аддитивной группе поля рациональных чисел.

Вариант 26. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0,1\}$, с операцией умножения упорядоченных пар, определенной по следующим правилам:

$$(a,\ b)\odot(c,\ d)=(a\cdot c,\ b\cdot d).$$

Операция умножения элементов упорядоченных пар выполняются в моноиде $(\{0,1\};\wedge)$.

Вариант 27. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ b & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1,2\}}$, с операциями сложения матриц. Операция сложения элементов матриц выполняется в моноиде $\left(2^{\{0,1,2\}},\ \cap\right)$.

Вариант 28. Множество многочленов степени не выше n, коэффициенты которых — рациональные числа, с операцией сложения многочленов, определенной по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \oplus \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i.$$

Операция сложения рациональных чисел чисел выполняется в аддитивной группе рациональных чисел.

Вариант 29. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в моноиде $\left(2^{\{0,1\}},\ \cap\right)$.

Вариант 30. Множество многочленов степени не выше n, коэффициенты которых — целые числа, с операцией сложения многочленов, определенной по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \oplus \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i.$$

Операция сложения целых чисел выполняется в аддитивной группе целых чисел.

Задача 2

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) Для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным? Идемпотентным? Замкнутым?

б) Для кольца проверить, есть ли в нем делители нуля? является ли кольцо полем?

При решении задачи № 2 использовать результаты, полученные при решении задачи № 1 домашнего задания.

Символом $\mathbb{O}$ в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 1. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в поле $\mathbf{Z}_2$ вычетов по модулю 2.

Вариант 2. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (a \cdot c,\ b\ cdotd).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в поле $\mathbf{Z}_2$ вычетов по модулю 2.

Вариант 3. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в поле $\mathbf{Z}_3$ вычетов по модулю 3.

Вариант 4. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1\}},\ \cup,\ \cap\right)$.

Вариант 5. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1, 2\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a \oplus c,\ b \oplus d); \quad (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (a \odot c,\ b \odot d).$$

Операции сложения и умножения элементов выполняются в поле $\mathbf{Z}_3$ вычетов по модулю 3.

Вариант 6. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в кольце $\left(2^{\{0,1\}},\ \triangle,\ \cap\right)$.

Вариант 7. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \odot (c,\ d) = (a \cdot c,\ b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в полукольце $\mathcal{B}$.

Вариант 8. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \odot (c,\ d) = (a \cdot c,\ b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1\}},\ \cup,\ \cap\right)$.

Задача 2

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) Для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным? Идемпотентным? Замкнутым?

б) Для кольца проверить, есть ли в нем делители нуля? является ли кольцо полем?

При решении задачи № 2 использовать результаты, полученные при решении задачи № 1 домашнего задания.

Символом $\mathbb{O}$ в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 9. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1\}},\ \cup,\ \cap\right)$.

Вариант 10. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in 2^M$ (M — некоторое множество), с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \odot (c,\ d) = (a \cdot c,\ b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в кольце $\left(2^M,\ \triangle,\ \cap\right)$.

Вариант 11. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $\mathcal{B}$.

Вариант 12. Множество чисел вида $x + \sqrt{2}y$, где x и y — рациональные числа, с операциями сложения и умножения чисел, определенным по следующим правилам

$$(x_1 + \sqrt{2}y_1) + (x_2 + \sqrt{2}y_2) = (x_1 + x_2) + \sqrt{2}(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + \sqrt{2}y_1) \cdot (x_2 + \sqrt{2}y_2) = (x_1x_2 + 2y_1y_2) + \sqrt{2}(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Операции сложения и умножения рациональных чисел выполняются в поле рациональных чисел.

Вариант 13. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ \mathbb{O} & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in \{0, 1\}$ с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $(\{0, 1\},\ \min,\ \max)$.

Вариант 14. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ b & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1\}},\ \cap,\ \cup\right)$.

Вариант 15. Множество чисел вида $x + \sqrt{3}y$, где x и y — рациональные числа, с операциями сложения и умножения чисел, определенным по следующим правилам

$$(x_1 + \sqrt{3}y_1) + (x_2 + \sqrt{3}y_2) = (x_1 + x_2) + \sqrt{3}(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + \sqrt{3}y_1) \cdot (x_2 + \sqrt{3}y_2) = (x_1x_2 + 3y_1y_2) + \sqrt{3}(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Операции сложения и умножения рациональных чисел выполняются в поле рациональных чисел.

Задача 2

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) Для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным? Идемпотентным? Замкнутым?

б) Для кольца проверить, есть ли в нем делители нуля? является ли кольцо полем?

При решении задачи № 2 использовать результаты, полученные при решении задачи № 1 домашнего задания.

Символом $\mathbb{O}$ в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 16. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1\}$, с операциями сложения и умножения, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \odot (c,\ d) = (a \cdot c,\ b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в полукольце $(\{0, 1\},\ \max,\ \min)$.

Вариант 17. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a \oplus c,\ b \oplus d); \quad (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (a \odot c,\ b \odot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в кольце $\mathbf{Z}_4$ вычетов по модулю 4.

Вариант 18. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3\}$, с операциями сложения и умножения матриц, причем операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в кольце $\mathbf{Z}_4$ вычетов по модулю 4.

Вариант 19. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0, 1, 2\}$, с операциями сложения и умножения, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \odot (c,\ d) = (a \cdot c,\ b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в полукольце $(\{0, 1, 2\},\ \max,\ \min)$.

Вариант 20. Множество многочленов степени не выше n над полем действительных чисел с операциями сложения и умножения многочленов, определенных по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \oplus \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i, \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \odot \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i \cdot b_i) x^i.$$

Операции сложения и умножения действительных чисел выполняются в поле действительных чисел.

Вариант 21. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1,2,3\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1,2,3\}},\ \cup,\ \cap\right)$.

Задача 2

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) Для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным? Идемпотентным? Замкнутым?

б) Для кольца проверить, есть ли в нем делители нуля? является ли кольцо полем?

При решении задачи № 2 использовать результаты, полученные при решении задачи № 1 домашнего задания.

Символом $\mathbb{O}$ в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 22. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0,1,2,3,4\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a \oplus c,\ b \oplus d); \quad (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (a \odot c,\ b \odot d).$$

Операции сложения и умножения элементов выполняются в поле $\mathbf{Z}_5$ вычетов по модулю 5.

Вариант 23. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1,2\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в кольце $\left(2^{\{0,1,2\}},\ \triangle,\ \cap\right)$.

Вариант 24. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \{0,1\}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $(\{0,1\},\ \min,\ \max)$.

Вариант 25. Множество чисел вида $x + \sqrt{5}y$, где x и y — рациональные числа, с операциями сложения и умножения чисел, определенным по следующим правилам

$$(x_1 + \sqrt{5}y_1) + (x_2 + \sqrt{5}y_2) = (x_1 + x_2) + \sqrt{5}(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + \sqrt{5}y_1) \cdot (x_2 + \sqrt{5}y_2) = (x_1x_2 + 3y_1y_2) + \sqrt{5}(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Операции сложения и умножения рациональных чисел выполняются в поле рациональных чисел.

Вариант 26. Множество упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x, y \in \{0,1\}$, с операциями сложения и умножения упорядоченных пар, определенных по следующим правилам:

$$(a,\ b) \oplus (c,\ d) = (a + c,\ b + d); \quad (a,\ b) \odot (c,\ d) = (a \cdot c,\ b \cdot d).$$

Операции сложения и умножения элементов упорядоченных пар выполняются в полукольце $\mathcal{B}$.

Вариант 27. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ b & c \end{pmatrix}$, где $a, b, c \in 2^{\{0,1,2\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения элементов матриц выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1,2\}},\ \cap,\ \cup\right)$.

Вариант 28. Множество многочленов степени не выше n над полем рациональных чисел с операциями сложения и умножения многочленов, определенных по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \oplus \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i, \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \odot \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i \cdot b_i) x^i.$$

Операция сложения и умножения рациональных чисел выполняется в поле рациональных чисел.

Задача 2

Проверив аксиомы, установить, является ли заданная алгебра с двумя бинарными операциями полукольцом или кольцом. При этом:

а) Для полукольца (не являющегося кольцом), проверить, является ли полукольцо коммутативным? Идемпотентным? Замкнутым?

б) Для кольца проверить, есть ли в нем делители нуля? является ли кольцо полем?

При решении задачи № 2 использовать результаты, полученные при решении задачи № 1 домашнего задания.

Символом $\mathbb{O}$ в условии задачи обозначен нейтральный элемент по сложению алгебры, над которой выполняются операции над элементами матриц или упорядоченных пар.

Вариант 29. Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in 2^{\{0,1\}}$, с операциями сложения и умножения матриц. Операции сложения и умножения выполняются в полукольце $\left(2^{\{0,1\}}, \cap, \cup\right)$.

Вариант 30. Множество многочленов степени не выше n над полем чисел вида $a+\sqrt{2}b$, где a, b — рациональные числа, с операциями сложения и умножения многочленов, определенных по следующим правилам:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \oplus \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i, \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \odot \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i \cdot b_i) x^i.$$

Операция сложения и умножения чисел выполняется в соответствующем поле.